AP **LOGARITHME NEPERIEN**

Ex1 : Transformer les expressions suivantes :

$A = ln9$ $B = ln4$ $C = ln36$ $D = \ln(3e)$ $E = \ln(e^6)$ $F = ln\frac{9}{4}$

Ex2 : Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1°) $lnx = 3$ 2°) $lnx = -5$ 3°) $lnx \geq 2$ 4°) $e^x = 4$

5°) $\ln(x-4) = 0$ 6°) $lnx < 10$ 7°) $lnx + \ln(x-2) = ln5$

Ex3 : En utilisant le ln, trouver dans chacun des cas suivants, le plus petit entier *n* vérifiant l'inéquation donnée :
1°) $2^n > 100000$ 2°) $1{,}05^n > 2$ 3°) $0.95^n < 0{,}2$.

Vérifier vos résultats à l'aide de la table de la calculatrice.

Ex4 : Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la fonction f :

1°) $f(x) = x^2 - 8x + 8 + 6lnx$ 2°) $f(x) = xlnx - x + 1$ 3°) $f(x) = \frac{1}{x} + lnx$

Ex5 : f est la fonction définie sur]0 ; +∞ [par $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

1°) Calculer la dérivée de f . Dresser le tableau de variation de f sur]0 ; 5].

2°) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire le signe de f sur]0 ; 5].

Ex6 :1°) g est la fonction définie sur R par $\boldsymbol{g(x) = xe^x + 1}$. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

2°) Calculer $g(-1)$ et en déduire le signe de g sur R.

3°) On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞ [par $\boldsymbol{f(x) = e^x + lnx}$.

Démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ puis dresser le tableau de variations de f sur]0 ; +∞ [.

Ex7 : Une entreprise fabrique des pièces qu'elle conditionne par centaines. Sa fabrication journalière varie entre 100 pièces et 650 pièces. On suppose que le bénéfice (positif ou négatif), exprimé en milliers d'euros en fonction de la quantité q de pièces fabriquées (en centaines) est donné par : **B(*q*) = – 2*q*² + 20*q* – 18 – 16 ln *q*** avec $q \in [1 ; 6{,}5]$.
1°) Etudier les variations de la fonction B.
2°) Quelle est la quantité de pièces à fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice en euros.

Ex8 : ***Partie A :*** Soit la fonction f définie sur]0 ; +∞ [par $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 4 - 8\,ln\,x}$.
Etudier les variations de f. En déduire le signe de f.

Partie B : Le cours d'une action cotée en bourse, exprimée en dizaine d'euros, est égal à $f(x)$, où x représente le nombre de mois écoulés à partir du 1er décembre 2011.
1°) Un investisseur décide d'acheter 2500 actions de ce type. En quel mois de l'année 2012 est-il le plus judicieux pour lui d'acheter l'action ?
2°) Calculer sa dépense arrondie à l'euro.

Ex9 : Soit f la fonction définie sur [10 ; 500] par : $\boldsymbol{f(x) = \frac{300-100lnx}{x}}$.
1°) Montrer que $'(x) = \frac{100(lnx-4)}{x^2}$, puis étudier les variations de f sur [10 ; 500].
2°) Calculer $f(e^3)$ et en déduire le signe de f sur [10 ; 500].

Ex10 : On considère les fonctions f er g définies sur [1 ; +∞[par $\boldsymbol{f(x) = 2x \ln x + x}$ et $\boldsymbol{g(x) = x^2 \ln x}$.
Calculer $g'(x)$. En déduire une primitive de f sur [1 ;+∞[.

Ex11 : Démontrer que la fonction F est une primitive de f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \ln x$ F$(x) = x\ln(x) - x$

b) $f(x) = \ln x - 3$ F$(x) = x(\ln(x) - 4)$

Ex12 : Calculer les intégrales suivantes :

1°) $I = \int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

2°) $J = \int_2^4 \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$

Ex13 : ***Partie I : Etude d'une fonction :*** On considère la fonction f définie et dérivable sur]0 ; +∞[par

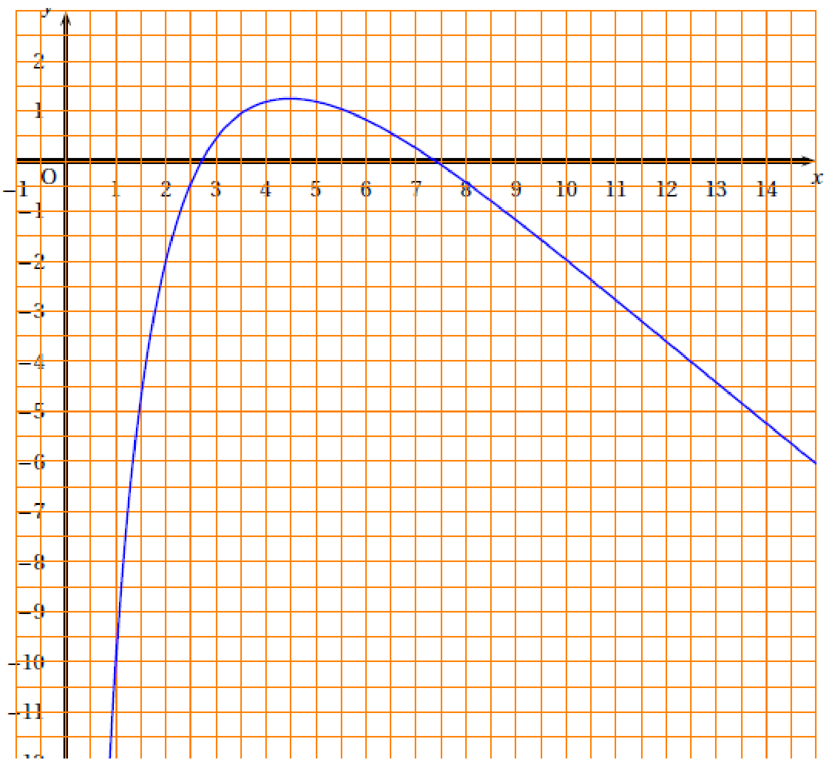
$\boldsymbol{f(x) = (5 - 5\ln x)(\ln x - 2)}$ et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

1°) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. On demande les valeurs exactes. Déterminer ensuite le signe de $f(x)$.

2°) Montrer que $f'(x) = \frac{15-10\ln x}{x}$.

3°) Etudier les variations de f.

4°) En utilisant la courbe ci-dessous, donner une valeur approchée à 0,1 près des solutions de l'équation $f(x) = 1$.



Partie II : Application : Une entreprise fabrique et vend des jouets. $f(x)$ représente le résultat (bénéfice ou perte) en milliers d'euros qu'elle réalise lorsqu'elle fabrique x centaines de jouets, pour x compris entre 1 et 10, f désignant la fonction étudiée dans la partie I.

1°) Déterminer, à un jouet près, les quantités à produire pour ne pas travailler à perte.

2°) Cette entreprise veut réaliser un bénéfice supérieur à 1000 euros. Combien de jouets doit-il fabriquer ?