Correction PRIMITIVES – INTEGRALES

Ex1 : 1°) $F(x) = 0{,}5x^2 + x$ 2°) $F(x) = x^3 - 2{,}5x^2 + 2x$ 3°) $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{7}x^7$

4°) $F(x) = 0{,}25x^4 + 0{,}25x^3 - 0{,}5x^2 - 5x$ 5°) $F(x) = \frac{-1}{x}$ 6°) $F(x) = 1{,}5x^2 - e^x$

7°) $F(x) = 0{,}5e^{2x}$ 8°) $F(x) = -4e^{-x}$ 9°) $F(x) = -2e^x$ 10°) $F(x) = 3e^x + \frac{5}{4}x^4 - 2x$

Ex2 : Dans cet exercice, on dérive F et on obtient f.

Cela prouve que F est une primitive de f.

Ex3 : On sait que $\boldsymbol{F' = f}$**.** Le signe de F' donne les variations de F.

F' est négative sur $[-3\,;-1[$, positive sur $]-1\,;3[$ et négative sur $]3\,;4[$.

Donc F est décroissante sur $[-3\,;-1[$, croissante sur $]-1\,;3[$, décroissante sur $]3\,;4[$.

Cela correspond à la **courbe 3.**

Ex4 : Voir page suivante.

Ex5 : f est positive sur $[0;1]$. $F(x) = x^2 + 5x + 4e^{-x}$

L'aire vaut $\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = 2 + 4e^{-1}$ U.A. ≈ 3,472 U.A.

Ex6 : Cf est au-dessus de Cg sur $[1;3]$donc Aire $= \int_1^3 (f(x) - g(x)dx = \int_1^3 (2x-2)dx = 4\ U.A.$

Ex7 : La valeur moyenne est $\frac{1}{2-0} \times \int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \times 32 = 16$

Ex8 : La valeur moyenne est $m = \frac{1}{e-1} \times \int_0^e f(x)dx = \frac{1}{e-1} \times 1 = \frac{1}{e-1}$

Ex9 : 1°) a) $F'(x) = f(x)$ b) Idem.

2°) $\int_1^e \frac{1}{x}dx = 1$ $\int_2^4 \left(\frac{5}{x^2} + \frac{3}{x}\right)dx = \frac{5}{4} + 3ln4 - 3ln2$

Ex4 1) $f(x) = x \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad F(2) = \frac{1}{2}\times 2^2 = 2 \quad F(-3) = \frac{1}{2}\times(-3)^2 = 4{,}5$

$$\int_{-3}^{2} x\,dx = F(2) - F(3) = 2 - 4{,}5 = \boxed{-2{,}5}$$

2) $f(x) = x^3 \quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 \quad F(2) = \frac{1}{4}\times 2^4 = 4 \quad F(-3) = \frac{1}{4}(-3)^4 = \frac{81}{4}$

$$\int_{-3}^{2} x^3\,dx = F(2) - F(-3) = 4 - \frac{81}{4} = \boxed{-16{,}25}$$

3) $f(x) = x^2 + 3x - 4 \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x \quad F(1) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 = \frac{-13}{6}$

$F(-4) = \frac{1}{3}(-4)^3 + \frac{3}{2}(-4)^2 - 4(-4) = \frac{56}{3}$

$$\int_{-4}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-4)$$
$$= \frac{-13}{6} - \frac{56}{3} = \boxed{\frac{-125}{6}}$$

4) $f(x) = 1 - x \quad F(x) = x - \frac{1}{2}x^2 \quad F(2) = 0 \quad F(-3) = \frac{-15}{2}$

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = F(2) - F(-3) = 0 - \left(\frac{-15}{2}\right) = \boxed{7{,}5}$$

5) $f(x) = 1 - e^x \quad F(x) = x - e^x \quad F(1) = 1 - e^1 \quad F(0) = 0 - e^0 = 0 - 1 = -1$

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(0) = (1 - e^1) - (-1) = 1 - e^1 + 1 = \boxed{2 - e^1} \quad (\simeq 0{,}718)$$

6) $f(x) = e^x + e^{-x} \quad F(x) = e^x - e^{-x} \quad F(1) = e^1 - e^{-1} \quad F(-1) = e^{-1} - e^{-(-1)} = e^{-1} - e^1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = (e^1 - e^{-1}) - (e^{-1} - e^1) = e^1 - e^{-1} - e^{-1} + e^1 = \boxed{2e^1 - 2e^{-1}}$$

$(\simeq 4{,}70)$

7) $f(x) = e^{3x} + 2 \quad F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 2x \quad F(1) = \frac{1}{3}e^3 + 2 \quad F(0) = \frac{1}{3}e^0 + 0 = \frac{1}{3}$

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3}e^3 + 2\right) - \left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{3}e^3 + \frac{5}{3}}$$

$(\simeq 8{,}362)$