AP TS Corrigé :Complexes et ensemble de points

Ex1 : 1°) x^2 - 2 x + 3 = $(x - 1)^2 - 1 + 3$ = $(x - 1)^2 + 2$

2°) $x^2 - 7x - 9$ = $(x - \frac{7}{2})^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 9$ = $(x - \frac{7}{2})^2 - \frac{85}{4}$

3°) $x^2 + 492x - 25$ = $(x + 246)^2 - 246^2 - 25$ = $(x + 246)^2$-60 541

Ex2 : Il s'agit de savoir reconnaître les équations de cercles et de droites, en particulier.

1°) $x^2 + y^2 - 3x - 2y = 1$ est l'équation d'un cercle.

L'équation est équivalente à $(x - 1,5)^2 - 1,5^2 + (y - 1)^2 - 1 = 1$ $\Leftrightarrow$ $(x - 1,5)^2 + (y - 1)^2 = \frac{17}{4}$

$\Leftrightarrow$ $(x - 1,5)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{\frac{17}{4}}^2$

Donc c'est l'équation du cercle de centre I(5 ; 1) et de rayon $\sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

2°) $-4xy + 5 = 0$ $\Leftrightarrow$ $y = \frac{5}{4x}$ $\Leftrightarrow$ $y = \frac{5}{4}\frac{1}{x}$. Donc c'est l'équation d'une hyperbole.

3°) $2x + 3y - 4 = 2$ $\Leftrightarrow$ $y = \frac{-2x+4+2}{3}$ $\Leftrightarrow$ $y = -\frac{2}{3}x + 2$. C'est l'équation d'une droite.

4°) $2x^2 + 2y^2 + 5y - 3 = 0$ $\Leftrightarrow$ $2(x^2 + y^2 + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2} = 0$ $\quad x^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$

Donc c'est l'équation du cercle de centre I(0 ; $-\frac{5}{4}$) et de rayon $\frac{7}{4}$

5°) $2x^2 - 2y + 5x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow$ $y = x^2 + 2,5x - 1,5$. Donc c'est l'équation d'une parabole.

6°) $2x^2 - 2y^2 + 5x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow$ $2y^2 = 2x^2 + 5x - 3$ $\Leftrightarrow$ $y^2 = x^2 + 2,5x - 1,5$ Ce n'est pas l'équation d'un ensemble « simple »

7°) $x^2 + y^2 + 5x + 10y - 3 = 0$ $\Leftrightarrow$ $(x + 2,5)^2 - 2,5^2 + (y + 5)^2 - 5^2 - 3 = 0$ $\Leftrightarrow$ $(x + 2,5)^2 + (y + 5)^2 = 34,25$

Donc c'est l'équation du cercle de centre I(-2,5 ; -5) et de rayon $\sqrt{34,25}$

Ex3 : On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z = (2z – i) + (3iz – 4).

1°) z est un réel, donc z = x où x est réel.

Z = (2 x – i) + (3i x – 4) = 2 x - 4 + i(3 x – 1) qui est la forme algébrique de Z.

Z réel $\Leftrightarrow$ Im(Z) = 0 $\Leftrightarrow$ 3 x – 1 = 0 $\Leftrightarrow$ $x = \frac{1}{3}$

Donc Z est réel pour z réel z = $\frac{1}{3}$

2°) Point A' image du point A(2 – i) : $z_{A'} = (2z_A - i) + (3iz_A - 4) = 2(2 - i) - i + 3i(2 - i) - 4$

$z_{A'} = 4 - 2i - i + 6i - 3i^2 - 4 = 3 + 3i$. Donc l'image de A estA'(3 + 3 i)

3°) Point(s) dont l'image est B'(i) : on résout (2z – i) + (3iz – 4) = i $\Leftrightarrow$ 2 z + 3 i z = i + 4 + i

z(2 + 3i) = 4 + 2i $\Leftrightarrow$ $z = \frac{4+2i}{2+3i} = \frac{4+2i}{2+3i}\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{8-12i+4i-6i^2}{2^2+3^2} = \frac{14-8i}{13} = \frac{14}{13} - \frac{8}{13}i.$

Donc l'antécédent de B'(i) est B$(\frac{14}{13} - \frac{8}{13}i)$.

4°) Ensemble des points invariants : on résout Z = z $\Leftrightarrow$ (2z − i) + (3iz − 4) = z

$\Leftrightarrow$ 2 z - i + 3iz - 4 = z $\Leftrightarrow$ z + 3i z = 4 + i $\Leftrightarrow$ z(1 + 3i) = 4 + i $\Leftrightarrow$ z = $\frac{4+i}{1+3i}\ \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{4-12i+i-3i^2}{1^2+3^2} = \frac{7}{10} - \frac{11}{10}i.$

Le point invariant est $I(\frac{7}{10} - \frac{11}{10}i)$

5°)Forme algébrique de Z : on pose z = x + i y où x et y sont des réels.

Z = 2(x + i y) - i + 3i(x + i y) - 4 = 2 x + 2i y - i + 3i x - 3 y - 4 = 2 x - 3 y - 4 + i(3 x + 2 y - 1)

6°) a) Ensemble des points M(z) tels que Z soit un réel :
Z $\in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Im(Z) = 0 $\Leftrightarrow$ 3 x + 2 y - 1 = 0 $\Leftrightarrow$ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
L'ensemble des points M(z) tels que Z réel est la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

b) De même on trouve que l'ensemble des points M(z) tels que Z soit un imaginaire pur est la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

<u>Ex4</u> : Résoudre les équations et représenter les solutions dans le plan complexe :

1°) 2iz − 4 = 5i + 4 z On isole z

$\Leftrightarrow$ (- 4 + 2i)z = 4 + 5 i $\Leftrightarrow$ z = $\frac{4+5i}{-4+2i}\ \frac{-4-2i}{-4-2i} = \frac{-16-8i-20i-10i^2}{(-4)^2+2^2} = -\frac{3}{10} - \frac{7}{5}i.$ S = $\left\{-\frac{3}{10} - \frac{7}{5}i\right\}$

2°) $2i\bar{z} - 4 = 5i + 4\bar{z}$ On isole $\bar{z}$
(- 4 + 2i) $\bar{z}$ = 4 + 5 i $\Leftrightarrow$ $\bar{z} = \frac{4+5i}{-4+2i}\ \frac{-4-2i}{-4-2i} = -\frac{3}{10} - \frac{7}{5}i$ d'après 1°) Donc z = $-\frac{3}{10} + \frac{7}{5}i$ S = $\left\{-\frac{3}{10} + \frac{7}{5}i\right\}$

3°) $2iz - 4 = 5i + 4\bar{z}$ on pose z = x + i y où x et y sont des réels.

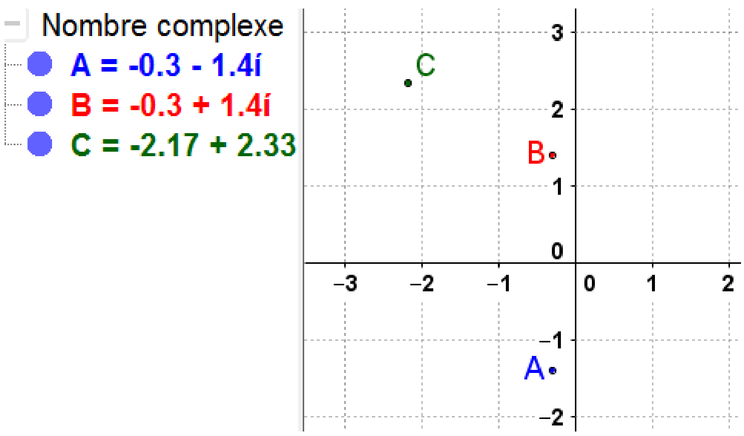
$\Leftrightarrow$ 2i(x + i y) - 4 = 5 i + 4(x - i y) $\Leftrightarrow$ 2 i x - 2 y - 4 = 5 i + 4 x - 4 i y $\Leftrightarrow$ - 2 y - 4 + i (2 x) = 4 x + i (5 - 4 y)

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 4 = 4x \\ 2x = 5 - 4y \end{cases}$ en utilisant la propriété: deux complexes sont égaux ssi ils même partie réelle et même partie imaginaire.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -2y - 4 \\ 2x = 5 - 4y \end{cases}$ On multiplie la 2è ligne par 2 puis on soustrait: $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -2y - 4 \\ 4x = 10 - 8y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2y - 4 - 10 + 8y \\ 2x = 5 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{3} \\ 2x = 5 - 4\frac{7}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{3} \\ x = \frac{1}{2}(5 - 4\frac{7}{3}) = -\frac{13}{6} \end{cases}$



Donc z = $-\frac{13}{6} + \frac{7}{3}$ i S = $\left\{-\frac{13}{6} + \frac{7}{3}\text{ i}\right\}$